

Hoja 3. Relaciones de Orden. Retículos

Susana Cubillo (2017)

*Ejercicios recopilados de los apuntes y
Hojas de problemas de los profesores
del Dpto. Matemática Aplicada a las TIC
(Campus Montegancedo). UPM.*

1. En el conjunto $(\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$ se define la relación

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x \leq z, \quad \frac{y}{x} = \frac{t}{z}$$

- a) Demuestra que es una relación de orden y estudia si es un orden total.
- b) Representa el conjunto de los elementos comparables con el elemento $(1, 1)$.

Sol.:

a) *Reflexiva.* $(x, y)R(x, y)$, para todo $(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R}$, ya que $x \leq x$ y $\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$

Antisimétrica. Si $(x, y)R(z, t)$ y $(z, t)R(x, y)$, entonces $x \leq z$, $\frac{y}{x} = \frac{t}{z}$, $z \leq x$, $\frac{t}{z} = \frac{y}{x}$. Por tanto, $x = z$, y también $t = y$.

Transitiva. Si $(x, y)R(z, t)$ y $(z, t)R(u, w)$, entonces $x \leq z$, $\frac{y}{x} = \frac{t}{z}$, $z \leq u$, $\frac{t}{z} = \frac{w}{u}$.

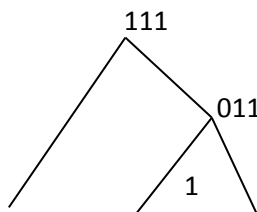
Se deduce que $x \leq u$, $\frac{y}{x} = \frac{w}{u}$, y finalmente $(x, y)R(u, w)$

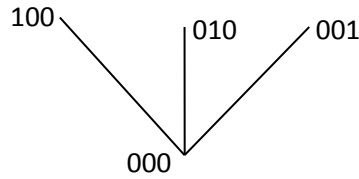
No es un orden total; por ejemplo los pares $(1, 1)$ y $(1, 2)$ no son comparables

b) Conjunto de elementos comparables con $(1, 1)$ es $\{(r, r); r \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

2. Determina el orden lexicográfico de las siguientes cadenas de bits: 001, 111, 010, 011, 000, 100 basado en el orden $0 \leq 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de estas cadenas, con el orden producto.

Sol.: $000 \leq_{Lex} 001 \leq_{Lex} 010 \leq_{Lex} 011 \leq_{Lex} 100 \leq_{Lex} 111$





3. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b\}$
 $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
 $S = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$
 Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

Sol.: $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$

$$Prod = \left\{ \begin{array}{l} ((1,a), (1,a)), ((1,a), (1,b)), ((1,a), (2,a)), ((1,a), (2,b)), ((1,a), (3,a)), \\ ((1,a), (3,b)), ((1,a), (4,a)), ((1,a), (4,b)), ((1,b), (1,b)), ((1,b), (2,b)), \\ ((1,b), (3,b)), ((1,b), (4,b)), ((2,a), (2,a)), ((2,a), (2,b)), \\ ((2,a), (4,a)), ((2,a), (4,b)), ((2,b), (2,b)), ((2,b), (3,b)), \\ ((2,b), (4,b)), ((3,a), (3,a)), ((3,a), (3,b)), ((3,a), (4,a)), ((3,a), (4,b)), \\ ((3,b), (3,b)), ((3,b), (4,b)), ((4,a), (4,a)), ((4,a), (4,b)), ((4,b), (4,b)) \end{array} \right\}$$

$$Lex = \left\{ \begin{array}{l} ((1,a), (1,a)), ((1,a), (1,b)), ((1,a), (2,a)), ((1,a), (2,b)), ((1,a), (3,a)), \\ ((1,a), (3,b)), ((1,a), (4,a)), ((1,a), (4,b)), ((1,b), (1,b)), ((1,b), (2,a)), \\ ((1,b), (2,b)), ((1,b), (3,a)), ((1,b), (3,b)), ((1,b), (4,a)), ((1,b), (4,b)), \\ ((2,a), (2,a)), ((2,a), (2,b)), ((2,a), (4,a)), ((2,a), (4,b)), ((2,b), (2,b)), \\ ((2,b), (4,a)), ((2,b), (4,b)), ((3,a), (3,a)), ((3,a), (3,b)), ((3,a), (4,a)), \\ ((3,a), (4,b)), ((3,b), (3,b)), ((3,b), (4,a)), ((3,b), (4,b)), ((4,a), (4,a)), \\ ((4,a), (4,b)), ((4,b), (4,b)) \end{array} \right\}$$

4. Sean (A, R) y (B, S) dos conjuntos ordenados, con $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b\}$
 $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$
 $S = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$
 Halla $(A \times B, Prod)$ y $(A \times B, Lex)$

Sol.: $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$

$$Prod = \left\{ \begin{array}{l} ((1,a), (1,a)), ((1,a), (1,b)), ((1,a), (2,a)), ((1,a), (2,b)), ((1,a), (3,a)), \\ ((1,a), (3,b)), ((1,b), (1,b)), ((1,b), (2,b)), ((1,b), (3,b)), ((2,a), (2,a)), \\ ((2,a), (2,b)), ((2,a), (3,a)), ((2,a), (3,b)), ((2,b), (2,b)), \\ ((2,b), (3,b)), ((3,a), (3,a)), ((3,a), (3,b)), ((3,b), (3,b)) \end{array} \right\}$$

$(1, a) \text{ Lex } (1, b) \text{ Lex } (2, a) \text{ Lex } (2, b) \text{ Lex } (3, a) \text{ Lex } (3, b)$

5. Sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Respecto al orden lexicográfico basado en el orden usual " \leq ",

- Encuentra todos los pares en $S \times S$ anteriores a $(2, 3)$.
- Encuentra todos los pares en $S \times S$ posteriores a $(3, 1)$.
- Dibuja el diagrama de Hasse de $(S \times S, \leq_{\text{Lex}})$

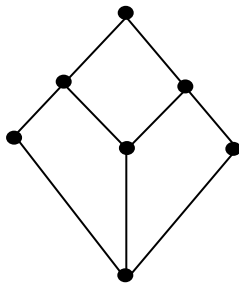
Sol.: a) Pares anteriores a $(2, 3)$: $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2)\}$

b) Pares posteriores a $(3, 1)$: $\{(3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

c) $(1, 1) \text{ Lex } (1, 2) \text{ Lex } (1, 3) \text{ Lex } (1, 4) \text{ Lex } (2, 1) \text{ Lex } (2, 2) \text{ Lex } (2, 3) \text{ Lex } (2, 4) \text{ Lex } (3, 1) \text{ Lex } (3, 2) \text{ Lex } (3, 3) \text{ Lex } (3, 4) \text{ Lex } (4, 1) \text{ Lex } (4, 2) \text{ Lex } (4, 3) \text{ Lex } (4, 4)$

Es un orden total, por lo que el diagrama de Hasse es una cuerda vertical

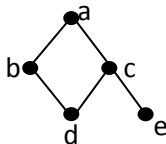
6. ¿Es un retículo distributivo el definido por el siguiente diagrama de Hasse?



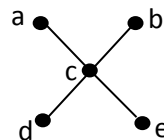
Sol.: Sí, ya que no contiene ningún subretículo de las dos formas estándar de retículos que no son distributivos

7. Halla los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo (si los hay) para los siguientes conjuntos con el orden dado por el diagrama de Hasse:

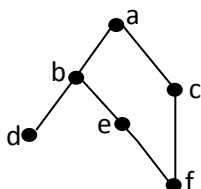
a)



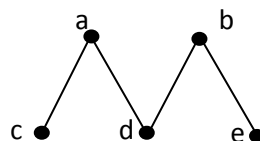
b)



c)



d)



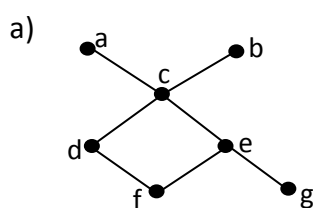
Sol.: a) Maximales= { a } Minimales= { d, e } Máximo= a Mínimo no existe

b) Maximales= { a, b } Minimales= { d, e } Máximo no existe Mínimo no existe

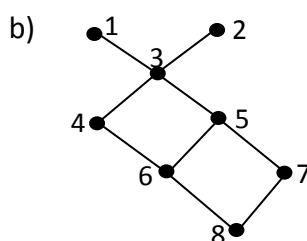
c) Maximales= { a } Minimales= { d, f } Máximo = a Mínimo no existe

d) Maximales= { a, b } Minimales= { c, d, e } Máximo no existe Mínimo no existe

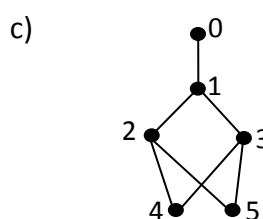
8. Halla cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo (si los hay) del conjunto B en cada uno de los siguientes casos:



$$B = \{c, d, e\}$$



$$B = \{4, 5, 6\}$$



$$B = \{2, 3, 4\}$$

Sol.: a) C. superiores={a,b} C. inferiores={f} Supremo=c Infimo no existe

b) C. superiores={1, 2, 3} C. inferiores={8} Supremo=3 Infimo = 6

c) C. superiores={0, 1} C. inferiores={4} Supremo=1 Infimo=4

9. Representa el diagrama de Hasse de los siguientes conjuntos ordenados, y halla los elementos notables de los subconjuntos señalados:

a) $(D_{60}, /)$, $A = \{2, 5, 6, 10, 12, 30\}$ y $B = \{2, 3, 6, 10, 15, 30\}$

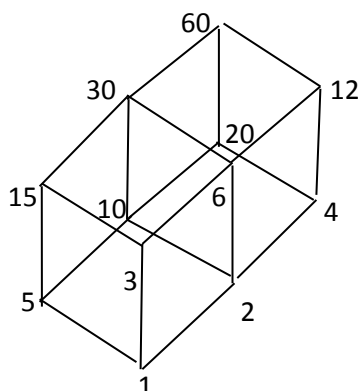
b) $(D_{48}, /)$, $A = \{2, 4, 6, 12\}$ y $B = \{3, 6, 8, 16\}$

c) $(D_{40}, /)$, $A = \{4, 5, 10\}$ y $B = \{2, 4, 8, 20\}$

Sol.: a) $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Por tanto, $|D_{60}| = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

M



Maximales (A)={ 12, 30}

Máximo(A) no existe

Minimales (A)= { 2, 5}

Mínimo (A) no existe

C. Superiores (A)={60}

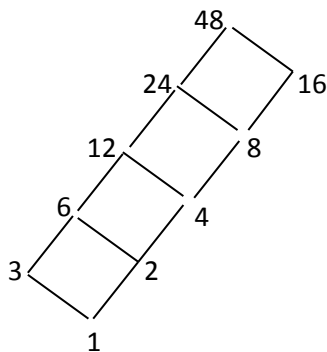
Supremo (A) = 60

C. Inferiores (A)= {1}

Infimo (A)=1

Maximales (B)={30} Máximo(B)=30
 Minimales (B)= { 2, 3} Mínimo (B) no existe
 C. Superiores (B)={30, 60} Supremo (B) = 30
 C. Inferiores (B)= {1} Infimo (B)=1

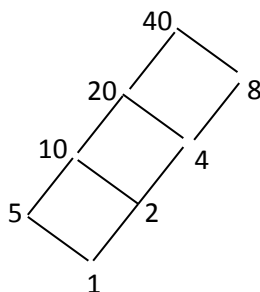
- b) $48 = 2^4 \cdot 3$ Por tanto, $|D_{48}| = 5 \cdot 2 = 10$
 $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$ $A = \{2, 4, 6, 12\}$ $B = \{3, 6, 8, 16\}$



Maximales (A)= {12} Máximo(A) = 12
 Minimales (A)= { 2 } Mínimo (A) = 2
 C. Superiores (A)={12, 24, 48} Supremo (A) = 12
 C. Inferiores (A)= {1, 2} Infimo (A)=2

Maximales (B)={6, 16} Máximo(B) no existe
 Minimales (B)= { 3, 8 } Mínimo (B) no existe
 C. Superiores (B)={48} Supremo (B) = 48
 C. Inferiores (B)= {1} Infimo (B)=1

- c) $40 = 2^3 \cdot 5$ Por tanto, $|D_{40}| = 4 \cdot 2 = 8$
 $D_{40} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ $A = \{4, 5, 10\}$ $B = \{2, 4, 8, 20\}$

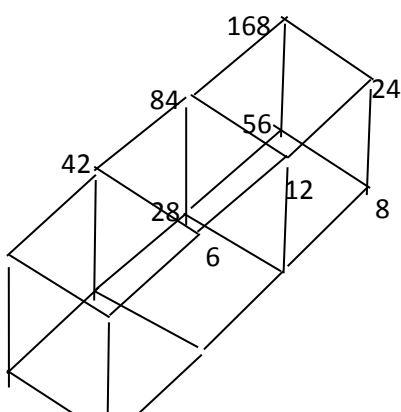


Maximales (A) = {4, 10 } Máximo(A) no existe
 Minimales (A)= { 4, 5 } Mínimo (A) no existe
 C. Superiores (A)={20, 40} Supremo (A) = 20
 C. Inferiores (A)= {1} Infimo (A)=1

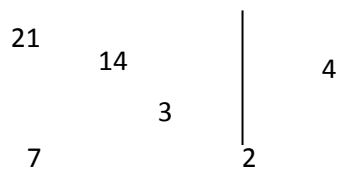
Maximales (B)={8, 20} Máximo(B) no existe
 Minimales (B)= { 2 } Mínimo (B) = 2
 C. Superiores (B)={40} Supremo (B) = 40
 C. Inferiores (B)= {1, 2} Infimo (B)=2

10. Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{168}, /)$. Si $A = \{4, 6, 12\}$,
 halla los elementos maximales de A, y las cotas superiores e inferiores, el supremo, el
 ínfimo, el máximo y el mínimo de A en D_{168} .

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \quad |D_{168}| = 16 \quad D_{168} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 12, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168\}$$



Maximales (A)={ 12} Máximo(A) = 12
 Minimales (A)= { 4, 6 } Mínimo (A) no existe
 C. Superiores (A)={12, 24, 84, 168} Supremo (A) = 12



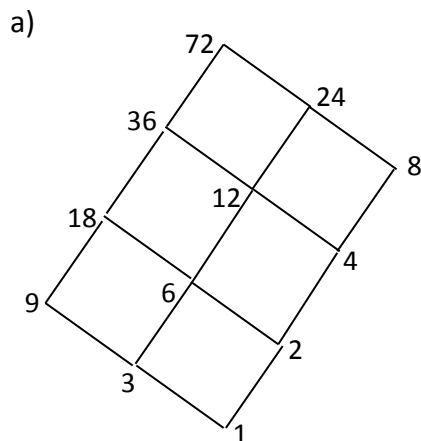
C. Inferiores (A) = {2, 1}

Infimo (A) = 2

11. Sea D_{72} el conjunto de todos los divisores de 72, y $/$ la relación de divisibilidad a/b si y sólo si 'a divide a b'.

- Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{72}, /)$.
- Sea $B = \{9, 12, 36\}$. Encuentra cotas superiores, inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo, si existen, en B .
- Encuentra, si existe, el complementario de 9 y el de 18 en $(D_{72}, /)$.
- Razona si $(D_{72}, /)$ es un álgebra de Boole.

Sol.: $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $|D_{72}| = 12$ $D_{72} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$



b) $B = \{9, 12, 36\}$

C. Superiores = { 36, 72 } Supremo = 36

C. Inferiores = { 3, 1 } Infimo = 3

Maximales = { 36 } Máximo = 36

Minimales = { 9, 12 } Mínimo no existe

c) $9' = 8$ $18'$ no existe

d) No es un álgebra de Boole porque no es un retículo complementario

12. Halla, si los hay, los elementos maximales, minimales, máximo y mínimo para los siguientes conjuntos ordenados:

$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$; $((0,1), \leq)$; $((0,1), \geq)$; $(\mathbb{N}, /)$; $(\mathbb{N} - \{1\}, /)$.

Sol.: $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$: Maximales = {X} Máximo = X Minimales = { \emptyset } Mínimo = \emptyset

$((0,1), \leq)$: Maximales = \emptyset ; Máximo no existe; Minimales = \emptyset ; Mínimo no existe

$((0,1), \geq)$: Maximales = \emptyset ; Máximo no existe; Minimales = \emptyset ; Mínimo no existe

$(\mathbb{N}, /)$: Maximales = \emptyset ; Máximo no existe; Minimales = { 1 }; Mínimo = 1

$(\mathbb{N} - \{1\}, /)$: Maximales = \emptyset ; Máximo no existe;

Minimales = { números primos }; Mínimo no existe

13. En cada uno de los casos siguientes señala si el conjunto X tiene o no una cota inferior en \mathbb{Z} , y si tiene alguna halla su ínfimo si existe.

a) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 16\}$

b) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x = 2y \text{ para algún } y \in \mathbb{Z}\}$

c) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 \leq 100x\}$

Sol.: a) C. Inferiores = $\{x \in \mathbb{Z}; x \leq -4\}$ Ínfimo = -4

b) C. Inferiores = \emptyset

c) $X = \{x \in \mathbb{Z}; x = 0 \text{ ó } (x > 0 \text{ y } x \leq 100) \text{ ó } (x < 0 \text{ y } x \geq 100)\} = \{x \in \mathbb{Z}; 0 \leq x \leq 100\}$

C. Inferior: $\{x \in \mathbb{Z}; x \leq 0\}$ Ínfimo = 0

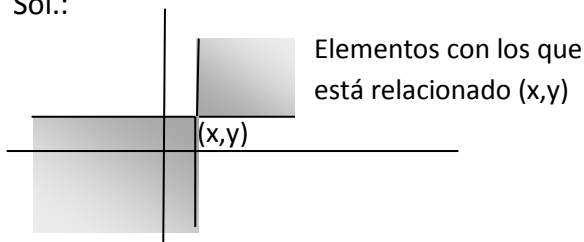
14. En $(\mathbb{N}, /) \times (\mathbb{N}, /)$ se considera el orden lexicográfico. Determina, si existen, las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo del conjunto $A = \{(2,1), (3,4)\}$.

Sol.: C. Superiores = $\{(6n, m); n, m \in \mathbb{N}\}$ Supremo = $(6,1)$

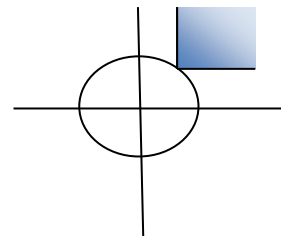
C. Inferiores = $\{(1, n); n \in \mathbb{N}\}$ Ínfimo no existe

15. En \mathbb{R}^2 se considera la relación de orden $(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow x \leq x' \text{ e } y \leq y'$. Halla los elementos maximales y minimales, supremo e ínfimo de $C = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$.

Sol.:



Elementos relacionados con (x, y)



Maximales de $(C) = \{(x, y) \in C; x \geq 0, y \geq 0\}$ Máximo no existe

Minimales de $(C) = \{(x, y) \in C; x \leq 0, y \leq 0\}$ Mínimo no existe

Cotas superiores de $(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1, y \geq 1\}$ Supremo = $(1,1)$

Cotas inferiores de $(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \leq -1, y \leq -1\}$ Ínfimo = $(-1,-1)$

16. Se considera en $D_{48} \times \mathbb{N}$ el orden lexicográfico correspondiente a tomar el orden divisibilidad en el primer factor y el orden usual en el segundo factor. Sea

$S = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (6, 3), (6, 1), (4, 2)\}$. Halla, si existen, las cotas superiores e inferiores, elementos maximales y minimales, máximo, mínimo, supremo e ínfimo de S .

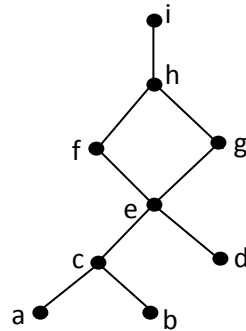
Sol.: Cotas superiores = $\{(24, n), (48, m); n, m \in \mathbb{N}\}$ Supremo = $(24,1)$

Cotas inferiores = $\{(1, n) ; n \in \mathbb{N}\}$ Infimo no existe

Maximales = $\{(6, 3), (4, 2)\}$ Máximo no existe

Minimales = $\{(2, 2), (3, 2)\}$ Mínimo no existe

17. Dado el orden parcial del siguiente diagrama de Hasse, obtén un orden total que lo contenga. ¿Cuántos pueden obtenerse?



Sol.: $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq g \leq f \leq h \leq i$

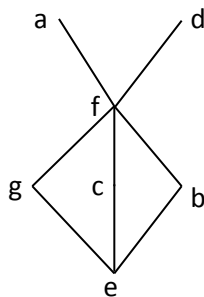
Número de formas = 16

18. Sea $T = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ la lista de tareas para realizar un trabajo, de las que se sabe que unas preceden a otras de la siguiente forma:

$$f \leq a, f \leq d, e \leq b, c \leq f, e \leq c, b \leq f, e \leq g, g \leq f$$

Halla el orden parcial. ¿Qué tareas pueden realizarse independientemente? Construye un orden si el trabajo lo realizad sólo una persona.

Sol.:



Se pueden realizar independientemente la 'a' y la 'd'
Y también la 'g', la 'c', y la 'b'

$$e \leq g \leq b \leq c \leq f \leq a \leq d$$

19. En $(D_{10}, /) \times (D_{18}, /)$ se considera el orden lexicográfico. Halla las cotas superiores, cotas inferiores, supremo e ínfimo, si existen, del subconjunto $S = \{(2, 2), (2, 3)\}$. Dibuja el diagrama de Hasse.

Se define la aplicación $f: D_{10} \times D_{18} \rightarrow D_{180}$ por $f(a, b) = ab$. ¿Es f inyectiva? ¿Es f suprayectiva?

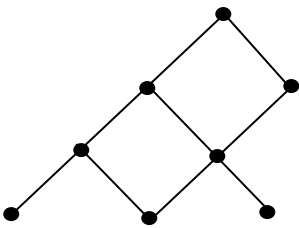
$$\text{Sol.: } D_{10} \times D_{18} = \left\{ \begin{array}{l} (1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (1,9), (1,18), \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,6), (2,9), (2,18), \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,6), (5,9), (5,18), \\ (10,1), (10,2), (10,3), (10,6), (10,9), (10,18) \end{array} \right\}$$

Cotas superiores (S) = $\{(2,6), (2,18), (5,n), (10,m); n, m \in D_{18}\}$ Supremo = (2,6)

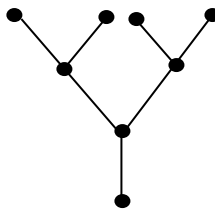
Cotas inferiores (S) = $\{(1,n), (2,1); n \in D_{18}\}$ Infimo = (2,1)

20. Estudia cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos.

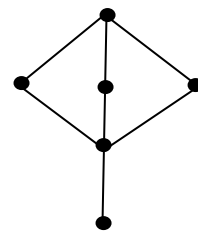
a)



b)



c)



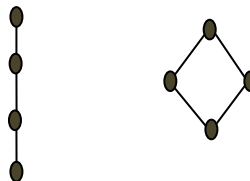
Sol.: Sólo es retículo el c)

21. Obtén los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

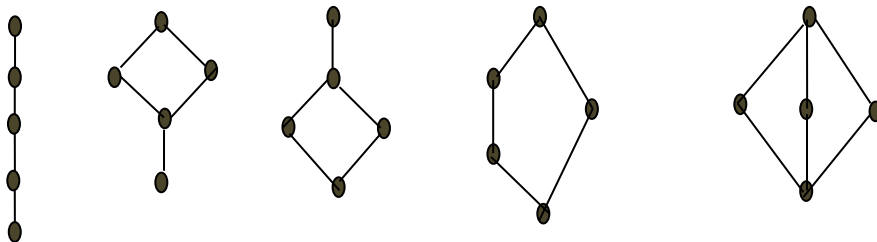
Sol.: De un elemento y de dos elementos, trivial, sólo hay uno.

De tres elementos, sólo hay uno, que es una cadena

De cuatro elementos, existen dos:



De cinco elementos



22. Sea $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} . ¿Tiene $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Sol.: $(\mathcal{F}(\mathbb{N}), \subseteq)$ no tiene elemento maximal, pero sí tiene minimal que es el conjunto \emptyset

Sí es un retículo, porque para cada par de elementos $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$,

$$\text{Supremo}(A, B) = A \cup B \quad \text{e} \quad \text{Infimo}(A, B) = A \cap B$$

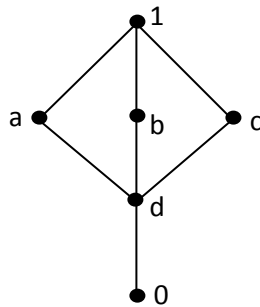
23. Sea $E(\mathbb{N})$ la colección de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} que tienen un número par de elementos. En $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ se consideran los elementos $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$. Encontrar cuatro cotas superiores para $\{A, B\}$. ¿Tiene $\{A, B\}$ supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$? ¿Es $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ un retículo?

Sol.: Cotas superiores para $\{A, B\}$ son

$$C = \{1, 2, 3, 4\}, D = \{1, 2, 3, 8\}, E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, F = \{1, 2, 3, 5, 9, 20\}$$

$\{A, B\}$ no tiene supremo en $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$, y por tanto, $(E(\mathbb{N}), \subseteq)$ no es un retículo

24. Estudia si en el siguiente retículo se verifica la igualdad $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.



No se verifica, ya que $a \vee (b \wedge c) = a \vee d = a$, pero $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = 1 \wedge 1 = 1$.

25. Encuentra el complementario de cada elemento en $(D_{42}, /)$, $(D_{45}, /)$ y $(D_{105}, /)$. ¿Son álgebras de Boole estos retículos?

Sol.: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; SI es un álgebra de Boole; $|D_{42}| = 8$; $D_{42} = \{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42\}$

$$1' = 42, 2' = 21; 3' = 14; 6' = 7$$

$45 = 3^2 \cdot 5$; NO es un álgebra de Boole; $|D_{45}| = 6$; $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$$1' = 45, 3' = \nexists; 5' = 9; 15' = \nexists$$

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$; SI es álgebra de Boole; $|D_{105}| = 8$; $D_{105} = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$

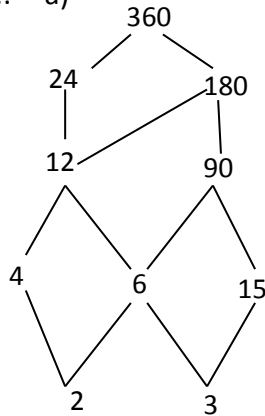
$$1' = 105, 3' = 35; 5' = 21; 7' = 15$$

26. Se considera el conjunto $A = \{2, 3, 4, 6, 12, 15, 24, 90, 180, 360\}$ y la relación de orden de divisibilidad.

a) Representa el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(A, /)$.

- b) ¿Es $(A, /)$ un retículo?
- c) Obtén, si existen, las cotas inferiores, cotas superiores, ínfimo, supremo, mínimo, máximo, elementos minimales y maximales del subconjunto $B = \{2, 3, 4, 6, 12, 180\}$.

Sol.: a)



b) Sí, porque todo par de elementos tiene supremo e ínfimo

c) Cotas superiores $(B) = \{180, 360\}$

Supremo $(B) = 180$

Cotas Inferiores $(B) =$ no existen

Ínfimo no existe

Maximales $(B) = \{180\}$

Máximo $(B) = 180$

Minimales $(B) = \{2, 3\}$

Mínimo (B) no existe

27. (Examen enero 2016)

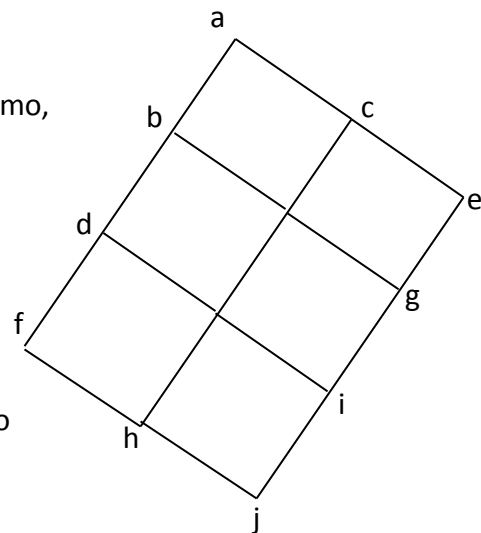
a) Sea D_{63} el conjunto de todos los divisores de 63, y $/$ la relación de divisibilidad dada por a / b si y sólo si "a divide a b". Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{63}, /)$.

b) Considera el conjunto ordenado A de la figura.

i) Obtén las cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, maximales, minimales, máximo y mínimo del conjunto $B = \{b, c, d\}$.

ii) ¿Es A un retículo?

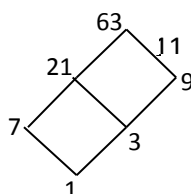
iii) Sea A' el conjunto ordenado cuyo diagrama de Hasse es el mismo que el de A, pero eliminando las aristas que van de b a g y de d a i. ¿Es A' un retículo?



iv) ¿Es A' complementario? En caso de que no lo sea, da un elemento que no tenga complementario y otro que sí lo tenga, indicando un complementario.

v) ¿Es A' distributivo?

Sol.: a) $63 = 3^2 \cdot 7$; $|D_{63}| = 6$; $D_{63} = \{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

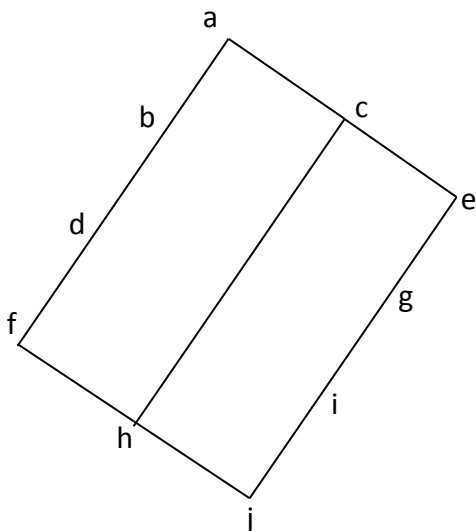


b)

- i) C. Superiores $(B) = \{a\}$ Supremo $(B) = a$
 C. Inferiores $(B) = \{h, i, j\}$ Infimo no existe
 Maximales $(B) = \{b, c\}$ Máximo no existe
 Minimales $(B) = \{c, d\}$ Mínimo no existe

ii) No es un retículo, ya que, por ejemplo, el conjunto de dos elementos $\{h, i\}$ tienen como cotas superiores $\{a, b, c, d\}$, pero no tiene supremo

iii) A' SI es un retículo, ya que todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.



iv) No es un retículo complementario.

Los elementos h y c no tienen complementario.

El elemento f tiene varios complementarios: e, g, i

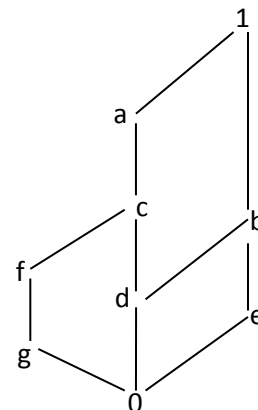
v) No es distributivo. Por ejemplo, el subretículo formado por los elementos $\{j, h, c, i, g\}$ no es distributivo. En particular

$$g \wedge (h \vee i) \neq (g \wedge h) \vee (g \wedge i)$$

28. (Examen noviembre 2016)

Considera el conjunto ordenado A del dibujo.

- a) Sea $B = \{a, d, f\}$, encuentra todos los elementos notables de B (cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales, si los hay).
- b) Encuentra, si existen, todos los elementos complementarios de b y c .
- c) Razona si A es un álgebra de Boole



- Sol.: a) C. superiores= $\{a, 1\}$ Supremo= a C. Inferiores= $\{0\}$ Ínfimo = 0
 Maximales= $\{a\}$ Máximo= a Minimales= $\{d, f\}$ Mínimo no existe
 b) $b' = \{f, g\}$ $c' = e$
 c) No es un álgebra de Boole: no es distributivo, y b tiene más de un complementario

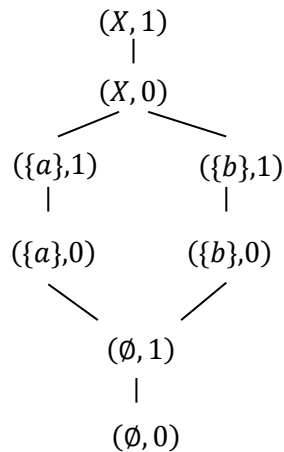
29. (Examen noviembre 2016)

Sean $(\wp(X), \subseteq)$ y (Y, \leq) dos conjuntos ordenados, con $X = \{a, b\}$, $Y = \{0, 1\}$, y donde $\wp(X)$ es el subconjunto de las partes de X .

- a) Calcula el cardinal del producto cartesiano $\wp(X) \times Y$.
 b) Dibuja el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(\wp(X) \times Y, \leq_{Lex})$, donde \leq_{Lex} es la relación "orden lexicográfico".

Sol.: a) $Card(\wp(X)) = 2^2$, y por tanto $Card(\wp(X) \times Y) = 8$

b) $\wp(X) \times Y = \{(\emptyset, 0), (\emptyset, 1), (\{a\}, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 0), (\{b\}, 1), (X, 0), (X, 1)\}$



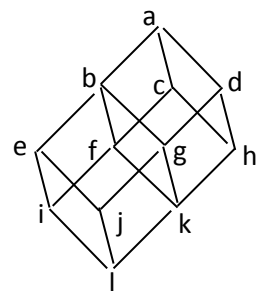
30. (Examen noviembre 2012)

Dado el conjunto ordenado $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

Cuyo diagrama de Hasse es el de la figura y el

subconjunto $B = \{b, e, f, k\}$

- a) Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de B en A
 b) Hallar los elementos maximales y minimales, máximo y mínimo de B .
 c) Hallar $\inf \{f, g\}$ y $\sup \{f, g\}$. ¿Es A un retículo?



Sol.: a) C. Superiores= $\{b, a\}$; Supremo = b ; C. Inferiores= $\{l\}$; Ínfimo = l

b) Maximales= $\{b\}$; Máximo = b ; Minimales= $\{e, k\}$; Mínimo no tiene

- c) $\inf \{f, g\} = k$; $\sup \{f, g\} = b$. Si es un retículo, porque todo par de elementos tienen supremo e ínfimo.

31. (Examen enero 2017)

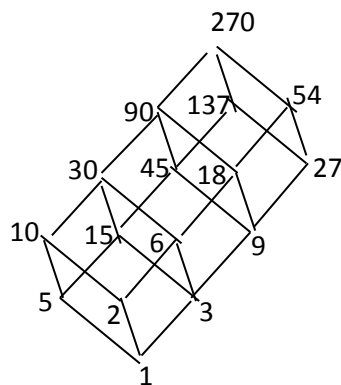
Sea D_{270} el conjunto de los divisores positivos de 270. Se pide:

- Sabiendo que una relación en D_{270} es un subconjunto del producto cartesiano $D_{270} \times D_{270}$, ¿cuál es el cardinal del conjunto de todas las relaciones distintas en D_{270} ?
- Dibuja el diagrama de Hasse de D_{270} con la relación de orden de divisibilidad.
- Encuentra todos los elementos de D_{270} que tienen complementario. Razona si D_{270} es Álgebra de Boole.
- Sea el conjunto $C = D_{270} - \{45, 54\}$ con la relación de orden de divisibilidad. Calcula si existe el $\sup \{6, 27\}$ en C . Razona si C es un retículo.

Sol.: a) $270 = 2 \cdot 5 \cdot 3^3$; $|D_{270}| = 16$; $|D_{270} \times D_{270}| = 16^2$

Número de subconjuntos de $D_{270} \times D_{270}$, es $2^{|D_{270} \times D_{270}|} = 2^{(16^2)}$

b)



- $1' = 270$; $2' = 137$; $5' = 54$; $27' = 10$; No es un álgebra de Boole: No es distributivo, y no todos los elementos tienen complementario; por ejemplo el 9 no tiene complementario.
- En $C = D_{270} - \{45, 54\}$ el $\sup \{6, 27\} = 270$
No es un retículo, porque no existe $\sup \{9, 15\}$. En efecto las cotas superiores de este par de elementos son $\{90, 137, 270\}$, pero ninguna de ellas es menor que las otras dos.